Causal Relativistic Hydrodynamics 入門

岡村 隆

関西学院大学

阪上研合宿 2008/4/1

はじめに

Causal Relativistic Hydrodynamics

$=$ 相対論的因果律を満たす流体力学

$\not\ni$ Navier-Stokes eqn.

$\Downarrow$

◎ “速い” タイムスケールで進行する散逸現象では重要

◎ 有効理論（Navier-Stokes eqn. など）の適用限界は，より高次の理論の予想があってはじめて分かる

- 応用例： QGP（Quark-Gluon Plasma）fireball の進化
- 応用例： 宇宙物理では？

参考文献

(P) **現象論的** (K) **運動論的（**Boltzmann eqn. **より）**

- Extended Thermodynamics Theories(ETTs)：
  - (P) Israel,
    Ann. Phys. **100** (1976) 310 [citation 215]
    (K) Israel and Stewart,
    Ann. Phys. **118** (1979) 341 [citation 185]
  - (P, K) Jou, Leblon, and Vasquez,
    Rep. Prog. Phys. **62** (1999) 1035
- Divergence Type Theories(DTTs)：
  - (P) Liu, Müller, and Ruggeri,
    Ann. Phys. **169** (1986) 191
  - (P) Geroch and Lindblom,
    Phys. Rev. D**41** (1990) 1855 [citation 25]
    (K) Reula and Nagy,
    J. Phys. A**30** (1997) 1965

何が問題か？

ex.) **粒子の拡散** $n(t,\vec{x})$ **粒子数密度**, $\vec{J}(t,\vec{x})$ **粒子流束**

保存則： $\partial_t n(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(t,\vec{x}) = 0$

構成方程式： $\vec{J}(t,\vec{x}) = -D\,\vec{\nabla}\,n(t,\vec{x})$

$$\Downarrow$$

拡散方程式： $\partial_t n(t,\vec{x}) - D\,\Delta\,n(t,\vec{x}) = 0$ **放物型！**

ex.) 1 **次元解**

$$n(t=0,x) = \delta(x) \quad \Rightarrow \quad n(t,x) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{2Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$\Rightarrow$ **（相対論的）因果律を満たさない**

非平衡熱力学系としての流体力学

流体の運動はマクロ系の非平衡現象 $\longrightarrow$ 時間の矢
しばしば 散逸を伴う（粘性, 熱伝導, etc.） 熱力学第 2 法則

$\Rightarrow$ 流体は, $\Delta S \geq 0$ を満たすように運動； 熱力学的力が駆動

流体力学の導出への 2 つのアプローチ

	マクロ	ミクロ
平衡	熱力学（第 0〜3 則）	統計力学（分配関数）
非平衡	非平衡熱力学（輸送方程式）	非平衡統計力学（Boltzmann eqn., 久保公式）

- 現象論的： 局所平衡 $+$ $\Delta S \geq 0$
- 運動論的： Boltzmann eqn. $\longrightarrow$ moment eqn. $+$ truncation

平衡熱力学の復習

示強量と密度量で熱力学法則を表現

熱力学量

示強変数：	T	μ	p	
示量変数：	E	N	V	$S(E,N,V)$
$\longrightarrow$ 密度量：	ϵ	n		$s(\epsilon,n)$

熱力学第 1 法則

$$ds = \frac{1}{T}\,d\epsilon - \frac{\mu}{T}\,dn \qquad \longrightarrow \qquad s = s(\epsilon, n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{T} := \frac{\partial s(\epsilon,n)}{\partial \epsilon} \qquad \frac{\mu}{T} := \frac{\partial s(\epsilon,n)}{\partial n}$$

$$p = -\epsilon + T\,s + \mu\,n \qquad \text{(Euler rel.)}$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{p}{T}\right) = -\epsilon\,d\left(\frac{1}{T}\right) + n\,d\left(\frac{\mu}{T}\right) \qquad \text{(Gibbs-Duhem)}$$

平衡熱力学の復習

熱力学第 2 法則

$$dS - \frac{dQ}{T} \geq 0 \qquad (dQ > 0\ ;\ \text{熱の流入})$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t s + \vec{\nabla}\cdot\vec{s} \geq 0 \qquad \vec{s} \sim s\,\vec{v} + \frac{\vec{q}}{T} + \cdots$$

変化の向き 〜 示強量が等しくなるように

孤立系（部分系 A, B）： $dS = dS_A + dS_B \geq 0$

熱力学第 1 法則： $T\,dS = dE + p\,dV - \mu\,dN$

N **交換：** $dS = -\left(\frac{\mu_A}{T_A} - \frac{\mu_B}{T_B}\right) dN_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{T} \searrow$

E **交換：** $dS = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right) dE_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} \nearrow$

acausal relativistic hydro. (Eckart, Landau & Lifshitz)

概念： 熱平衡からの摂動としての relativistic Navier-Stokes eqn.

局所平衡

- **各部分系は，熱平衡状態にある** $(\tau_{\text{micro.}} \ll \tau_{\text{macro.}})$
- **各部分系間の相互作用は小さい** $(\ell_{\text{micro.}} \ll \ell_{\text{macro.}})$

$\Rightarrow$ master variables : **空間的一様性と時間的一様性を両立**

$\Rightarrow$ **局所保存量** $\nabla_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$

物理量　局所熱力学的量 + “ 流れ ”

示強変数： $T(t,\vec{x})$　$\mu(t,\vec{x})$　$p(t,\vec{x})$　$\vec{P}_\perp(t,\vec{x})$

密度量： $\epsilon(t,\vec{x})$　$n(t,\vec{x})$　$s(t,\vec{x})$

$\rightarrow$ **流れ：** $\vec{P}_\perp(t,\vec{x})$　$\vec{j}_\perp(t,\vec{x})$　$\vec{s}(t,\vec{x})$　$T_{ij}(t,\vec{x})$

$\Rightarrow$ master variables （**局所保存量**）**：** $n^\mu(x)$, $T^{\mu\nu}(x)$

時間の矢： $s^\mu(x)$

仮定

- 局所平衡
- 時間発展は, $\nabla_\mu s^\mu \geq 0$ を満たす.
- s^μ は, n^μ, $T^{\mu\nu}$ のみに依存. (微分は含まない)

  $\longrightarrow$ s^μ の具体形が重要

平衡状態の s^μ (Euler rel.) $T_{eq}\, s_{eq} = p_{eq} + \epsilon - \mu_{eq}\, n$

$$s_{eq} = -\frac{u_{eq,\mu}}{T_{eq}} \left(p_{eq}\, u^\mu_{eq} - u_{eq,\nu} T^{\mu\nu} - \mu_{eq}\, n^\mu \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad s^\mu_{eq} = \frac{p_{eq}\, u^\mu_{eq} - u_{eq,\nu} T^{\mu\nu} - \mu_{eq}\, n^\mu}{T_{eq}}$$

acausal relativistic hydro. (Eckart, Landau & Lifshitz)

構成方程式の導出

仮定

- 局所平衡
- 時間発展は, $\nabla_\mu s^\mu \geq 0$ を満たす.
- s^μ は, n^μ, $T^{\mu\nu}$ のみに依存. (微分は含まない)

  $\longrightarrow$ s^μ の具体形が重要

非平衡状態の s^μ

$$s^\mu = (\hat{p}\, u^\mu - u_\nu T^{\mu\nu} - \hat{\mu}\, n^\mu)/\hat{T}$$

$$T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu u^\nu + 2\, P_\perp^{(\mu} u^{\nu)} + (\hat{p} + \Pi)\, h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$$

$$n^\mu = n\, u^\mu + j_\perp^\mu$$

※ " ^ " 付きの量: 平衡状態での $s_{eq}(\epsilon, n)$ より定義された量

$$\hat{s} := s_{eq}(\epsilon, n)\ , \quad \hat{T} := T_{eq}(\epsilon, n) = \left[\, \partial s_{eq}(\epsilon, n)/\partial \epsilon\, \right]^{-1}\ , \cdots$$

acausal relativistic hydro. (Eckart, Landau & Lifshitz)
構成方程式の導出

仮定

- **局所平衡**
- **時間発展は**, $\nabla_\mu s^\mu \geq 0$ **を満たす**.
- s^μ **は**, n^μ, $T^{\mu\nu}$ **のみに依存**. **(微分は含まない)**
  $\longrightarrow$ s^μ **の具体形が重要**

非平衡状態の s^μ

$$s^\mu = \hat{s}\, u^\mu + P_\perp^\mu/\hat{T} - (\hat{\mu}/\hat{T})\, j_\perp^\mu$$

$$T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu u^\nu + 2\, P_\perp^{(\mu}\, u^{\nu)} + (\hat{p} + \Pi)\, h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$$

$$n^\mu = n\, u^\mu + j_\perp^\mu$$

※ " ^ " **付きの量： 平衡状態での** $s_{eq}(\epsilon, n)$ **より定義された量**

$$\hat{p} = -\epsilon + \hat{T}\, \hat{s} + \hat{\mu}\, n$$

acausal relativistic hydro. (Eckart, Landau & Lifshitz)

構成方程式の導出

$$\nabla_\mu s^\mu = P_\perp^\mu \left(D_\mu \frac{1}{\hat{T}} - \frac{a_\mu}{\hat{T}} \right) - j_\perp^\mu D_\mu \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} - \frac{\Pi\theta}{\hat{T}} - \frac{\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}{\hat{T}}$$

frame の選択

Eckart frame (N-frame): $j_\perp^\mu = 0$

Landau-Lifshitz frame (E-frame): $P_\perp^\mu = 0$

構成方程式 (1st order in L-L frame)

$$j_\perp^\mu = -\mathcal{D}\, D^\mu \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} \qquad \Pi = -\zeta\,\theta \qquad \pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot s = \frac{j_\perp\cdot j_\perp}{\mathcal{D}} + \frac{\Pi^2}{\zeta\,\hat{T}} + \frac{\pi\cdot\pi}{2\,\eta\,\hat{T}} > 0 \qquad (\mathcal{D},\ \zeta,\ \eta > 0)$$

acausal relativistic hydro. (Eckart, Landau & Lifshitz)

構成方程式の導出

$$\nabla_\mu s^\mu = P_\perp^\mu \left(D_\mu \frac{1}{\hat{T}} - \frac{a_\mu}{\hat{T}} \right) - j_\perp^\mu D_\mu \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} - \frac{\Pi\theta}{\hat{T}} - \frac{\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}{\hat{T}}$$

疑問・問題点

- $\nabla \cdot s = O(\delta^2)$ $\quad |\, u^\mu - u^\mu_{eq} \,| = O(\delta)$

$$s^\mu = (\hat{p}\, u^\mu - u_\nu T^{\mu\nu} - \hat{\mu}\, n^\mu)/\hat{T} \; + \; O(\delta^2)$$

$$P_\perp^\mu, \quad \Pi, \quad \pi^{\mu\nu}, \quad j_\perp^\mu = O(\delta)$$

$O(\delta^2)$ **を無視する** 1st order formalism **においては**, $\nabla \cdot s = O(\delta^2)$ **に基づいて何も言えないのでは？**

- Instability (Hiscock & Lindblom '85) (overdetermined?)

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)

s^μ を $O(\delta^2)$ まで取り込んで, $\nabla\cdot s = O(\delta^2)$ を正しく評価しよう

frame inv. $\sim$ "gauge" inv.

n^μ, $T^{\mu\nu}$, s^μ は "reference frame" u^μ の選択に**非依存**

一方, n, ϵ, $j_\perp^\mu$, $P_\perp^\mu$, $\cdots$ は u^μ に**依存**.

$\Rightarrow$ frame inv. な構成方程式を求めたい. ($O(\delta)$ で)

$\Rightarrow$ $s^\mu(n, \epsilon, \cdots)$ を $O(\delta^2)$ まで frame inv. に求める.

諸量の frame 依存性 $u^\mu \longrightarrow \bar{u}^\mu := (1+\zeta_\perp^2)^{1/2}\, u^\mu + \zeta_\perp^\mu$

- δn, $\delta\epsilon$, $\delta\Pi$, $\delta\pi^{\mu\nu}$, $\delta\hat{\mathcal{O}}(\epsilon, n) = O(\zeta_\perp^2)$
- $\delta j_\perp^\mu$, $\delta P_\perp^\mu = O(\zeta_\perp)$

$$\Rightarrow \quad \nu_\perp^\mu := j_\perp^\mu - \frac{n}{\epsilon+\hat{p}} P_\perp^\mu\,, \qquad \delta\nu_\perp^\mu = O(\zeta_\perp^2)$$

$$U^\mu := u^\mu + \frac{P_\perp^\mu}{\epsilon+\hat{p}}\,, \qquad \delta U^\mu = O(\zeta_\perp^2)$$

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)

s^μ を $O(\delta^2)$ まで取り込んで, $\nabla \cdot s = O(\delta^2)$ を正しく評価しよう

$O(\delta^2)$ まで frame inv. な $s^\mu(n, \epsilon, \cdots)$

$$s^\mu = \hat{s}\, u^\mu + \frac{P_\perp^\mu}{\hat{T}} - \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} j_\perp^\mu - Q_1^\mu = \hat{s}\, U^\mu - \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} \nu_\perp^\mu - Q_1^\mu$$

$$Q_1^\mu := Q_{MIS}^\mu - \gamma \left\{ \left[\, \Pi + \cdots \right] u^\mu + \frac{\Pi\, P_\perp^\mu}{\epsilon + \hat{p}} \right\} + O(\delta^3)$$

$$Q_{MIS}^\mu := \frac{1}{\hat{T}\,(\epsilon + \hat{p})} \left(\pi^{\mu\lambda} P_{\perp,\lambda} + \Pi\, P_\perp^\mu + \frac{u^\mu}{2} P_\perp \cdot P_\perp \right)$$
$$+ \frac{u^\mu}{2\,\hat{T}} \left(\beta_0\, \Pi^2 + \beta_1\, \nu_\perp \cdot \nu_\perp + \beta_2\, \pi^{\rho\sigma} \pi_{\rho\sigma} \right)$$
$$+ \frac{\alpha_0}{\hat{T}}\, \Pi\, \nu_\perp^\mu + \frac{\alpha_1}{\hat{T}}\, \pi^{\mu\lambda} \nu_{\perp\lambda}$$

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)
構成方程式 1

$$\Theta := h^{\mu\nu}\,\nabla_\mu U_\nu\ , \qquad\qquad a^\mu := U\cdot\nabla\, U^\mu$$

$$\Sigma_{\mu\nu} := \langle\,\nabla_\mu\, U_\nu\,\rangle := \left(h_{(\mu}{}^{\rho}\, h_{\nu)}{}^{\sigma} - \frac{h_{\mu\nu}\, h^{\rho\sigma}}{d} \right) \nabla_\rho\, U_\sigma$$

entropy current の発散

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu s^\mu = &-\frac{\pi_{\mu\lambda}}{\hat{T}} \left[\, \Sigma^{\mu\lambda} + \beta_2\, (U\cdot\nabla\pi^{\mu\lambda}) + \alpha_1\, \nabla^\mu \nu_\perp^\lambda \,\right] \\
&- \frac{\Pi}{\hat{T}} \left[\, \Theta + \beta_0\, (U\cdot\nabla\Pi) + \alpha_0\, \nabla_\mu \nu_\perp^\mu \,\right] \\
&- \frac{\nu_{\perp\mu}}{\hat{T}} \left[\, \hat{T}\, D^\mu \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} + \beta_1\, (U\cdot\nabla\nu_\perp^\mu) + \alpha_0\, \nabla^\mu \Pi + \alpha_1\, \nabla_\nu \pi^{\mu\nu} \,\right]
\end{aligned}$$

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)
構成方程式 1

$$\Theta := h^{\mu\nu}\nabla_\mu U_\nu\,, \qquad a^\mu := U\cdot\nabla U^\mu$$

$$\Sigma_{\mu\nu} := \langle \nabla_\mu U_\nu \rangle := \left(h_{(\mu}{}^{\rho} h_{\nu)}{}^{\sigma} - \frac{h_{\mu\nu} h^{\rho\sigma}}{d} \right) \nabla_\rho U_\sigma$$

構成方程式（一様な熱平衡状態からの展開）

$$\nu_\perp^\mu = -\mathcal{D}\left[\hat{T} D^\mu \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} + \beta_1 h^\mu{}_\rho (U\cdot\nabla\nu_\perp^\rho) + \alpha_0 D^\mu \Pi + \alpha_1 (D_\nu \pi^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} a_\nu) \right]$$

$$\Pi = -\zeta\left[\Theta + \beta_0 (U\cdot\nabla\Pi) + \alpha_0 \nabla_\mu \nu_\perp^\mu \right]$$

$$\pi^{\mu\lambda} = -2\eta \left[\Sigma^{\mu\lambda} + \beta_2 \langle U\cdot\nabla\pi^{\mu\nu} \rangle + \alpha_1 \langle D^\mu \nu_\perp^\nu \rangle \right]$$

構成方程式(一様な熱平衡状態からの展開)

$$\tau_\nu\, h^\mu{}_\rho \left(U \cdot \nabla\, \nu_\perp^\rho\right) + \nu_\perp^\mu$$

$$= -\mathcal{D}\left[\, \hat{T}\, D^\mu \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} + \alpha_0\, D^\mu\, \Pi + \alpha_1\, \left(D_\nu\, \pi^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}\, a_\nu\right) \right]$$

$$\tau_\Pi\, (U \cdot \nabla \Pi) + \Pi = -\zeta\, \left[\, \Theta + \alpha_0\, \nabla_\mu\, \nu_\perp^\mu \,\right]$$

$$\tau_\pi\, \left\langle\, U \cdot \nabla \pi^{\mu\lambda} \right\rangle + \pi^{\mu\lambda} = -2\,\eta\, \left[\, \Sigma^{\mu\lambda} + \alpha_1\, \left\langle\, D^\mu \nu_\perp^\lambda \,\right\rangle \,\right]$$

where $\tau_\nu := \mathcal{D}\,\beta_1,\quad \tau_\Pi := \zeta\,\beta_0,\quad \tau_\pi := 2\,\eta\,\beta_2$

- $O(\delta)$ で frame inv. overdetermined でない
- τ_* $(\leftrightarrow \beta_*)$ によって,"流れ" に緩和 $\Rightarrow$ **有限の伝搬速度**
- α_* による異なるモード間の結合 $\Rightarrow$ **定常流でも影響**
- 輸送係数は状態依存の現象論的パラメータ $\Rightarrow$ kinetic theory

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)
2nd order formalism の利点

利点

- $O(\delta)$ で frame inv.
- **相対論的因果律** OK! (Hiscock & Lindblom '83)
- **安定性** OK! (Hiscock & Lindblom '83)

現象論的アプローチの注意点

- **求めた構成方程式は** $\nabla \cdot s \geq 0$ **の十分条件だが必要でない**

  $\rightarrow \quad \nu_\perp^\mu \, \Omega_{\mu\nu} \, \nu_\perp^\nu = \pi_{\mu\lambda} \, \Omega^{\mu\nu} \, \pi_\nu{}^\lambda = 0$

  構成方程式に存在しても $\nabla \cdot s$ **に効かない**
- **輸送係数は状態依存の現象論的パラメータ**

$$\Downarrow$$

kinetic theory **からのサポートの必要性**

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)
運動論的 アプローチ

Boltzmann eqn. & moment eqn.

- Boltzmann eqn. : 1 **粒子** inv. PDF $f(x,p)$, inv. **測度** $d\omega$

$$p^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - p^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\lambda} \right] f = \mathcal{C}[f]$$

- moment eqn. : $X^{\mu\cdots}(x) := \int d\omega\, p^\mu \chi^{\cdots}(p)\, f(x,p)$

$\rightarrow$ Boltzmann **より** $\nabla_\mu X^{\mu\cdots} = \int d\omega\, \chi^{\cdots} \mathcal{C}$

$$n^\mu = \int d\omega\, p^\mu f \quad \rightarrow \quad \nabla_\mu n^\mu = 0$$

$$T^{\mu\nu} = \int d\omega\, p^\mu p^\nu f \quad \rightarrow \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

$$X^{\mu\nu\lambda} = \int d\omega\, p^\mu p^\nu p^\lambda f \quad \rightarrow \quad \nabla_\mu X^{\mu\nu\rho} = I^{\nu\lambda}$$

$$\vdots$$

causal relativistic hydro. (Israel & Stewart)
運動論的 アプローチ

Boltzmann eqn. & moment eqn.

- Grad's (14-)moment approx. : $X^{\cdots} = X^{\cdots}(n^\mu, T^{\mu\nu})$

  $\rightarrow \qquad \nabla_\mu X^{\mu\nu\lambda}(n^\rho, T^{\rho\sigma}) \sim I^{\nu\lambda}(n^\rho, T^{\rho\sigma})$ **構成方程式!**

- **構成方程式**

$$
\begin{aligned}
\nu_\perp^\mu &= \cdots + a_0\, \Pi\, a^\mu + a_1\, \pi^{\mu\nu} a_\nu + \beta_1\, \Omega^\mu{}_\rho\, \nu_\perp^\rho \\
\Pi &= \cdots + \zeta\, a_0'\, \nu_\perp^\mu\, a_\mu \\
\pi^{\mu\lambda} &= \cdots + 2\,\eta\, \left[\, a_1' \left\langle \nu_\perp^\mu a^\lambda \right\rangle + 2\,\beta_2 \left\langle \pi^\mu{}_\rho\, \Omega^{\lambda\rho} \right\rangle \,\right]
\end{aligned}
$$

where $\quad a_{0,1} + a'_{0,1} = \partial(\beta\, \alpha_{0,1})/\partial\beta \quad \rightarrow \quad$ new 2-param.

and $\quad \Omega^{\mu\nu} := h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} \nabla_{[\rho} U_{\sigma]} \quad \rightarrow \quad$ new 2-coupling

See also Hiscock & Lindblom '83, Muronga '04

最近の話題： 微分展開としての流体力学

Baier, Romatschke, Son, Starinets, & Stephanov, arXiv:0712.2451 [hep-th]

微分展開としての流体力学

BRS^3： 流体近似 $\Leftrightarrow$ $k\, l_{\mathrm{mfp}} \ll 1$ （k ; マクロ量の波数）

c.f.) MIS： 熱平衡状態からの展開 $|\, u^\mu - u^\mu_{eq} \,| = O(\delta)$

conformal $T^{\mu\nu}$： $T^{\mu\nu} \to e^{(n+2)\omega}\, T^{\mu\nu}$ $(g_{\mu\nu} \to e^{-2\omega}\, g_{\mu\nu})$

symm. を満たす, あらゆる 2 階微分含む構成方程式を考察

$\Rightarrow$ 5 つの 2 階微分の項 （8 つの項 for not conformal）

$$\pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu} - \tau_\pi \left[\langle \nabla_u\, \pi^{\mu\nu} \rangle + \frac{n}{n-1}\, \pi^{\mu\nu}\, (\nabla \cdot u) \right]$$
$$-\lambda_2 \left\langle \pi^\mu{}_\lambda\, \omega^{\nu\lambda} \right\rangle + \lambda_1 \left\langle \pi^\mu{}_\lambda\, \pi^{\nu\lambda} \right\rangle$$
$$+\lambda_3 \left\langle \omega^\mu{}_\lambda\, \omega^{\nu\lambda} \right\rangle + \kappa \left\langle R^{\mu\nu} - (n-2)\, u_\alpha\, R^{\alpha\mu\nu\beta} u_\beta \right\rangle$$

最近の話題： 微分展開としての流体力学

Baier, Romatschke, Son, Starinets, & Stephanov, arXiv:0712.2451 [hep-th]

微分展開としての流体力学

BRS^3： **流体近似** $\Leftrightarrow$ $k\, l_{\rm mfp} \ll 1$ （k ; **マクロ量の波数**）

c.f.) MIS： **熱平衡状態からの展開** $|\, u^\mu - u^\mu_{eq}\,| = O(\delta)$

$\mathcal{N} = 4$ SYM hydro. **の輸送係数**（gauge/gravity **対応より**）

$\lambda_1\,,\ \kappa \neq 0$

$\lambda_2 \neq 0\,,\ \lambda_3 = 0$ (BHMR, arXiv:0712.2456 [hep-th])

$$\pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu} - \tau_\pi \left[\langle \nabla_u \pi^{\mu\nu} \rangle + \frac{n}{n-1}\,\pi^{\mu\nu}\,(\nabla\cdot u) \right]$$
$$-\lambda_2 \left\langle \pi^\mu{}_\lambda\, \omega^{\nu\lambda} \right\rangle + \lambda_1 \left\langle \pi^\mu{}_\lambda\, \pi^{\nu\lambda} \right\rangle$$
$$+\lambda_3 \left\langle \omega^\mu{}_\lambda\, \omega^{\nu\lambda} \right\rangle + \kappa \left\langle R^{\mu\nu} - (n-2)\, u_\alpha R^{\alpha\mu\nu\beta} u_\beta \right\rangle$$

熱力学第 2 法則は？

- **成立！** Loganayagam, arXiv:0801.3701 [hep-th]

  第 2 法則を満たす entropy current **を定義可能**

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}^{\mu} &:= s\,u^{\mu} \\
&+ \hat{T}^{n-3}\Big[\Big\{C_1(\tau_\pi,\kappa)\,(\sigma\cdot\sigma) + C_2(\lambda_3,\kappa)\,(\omega\cdot\omega)\Big\}\,u^{\mu} \\
&\qquad + C_3(\kappa)\,(\mathrm{Ricci,\ etc.})^{\mu\nu}\,u_{\nu} + C_4(\lambda_3,\kappa)\,\mathcal{D}_{\nu}\,\omega^{\mu\nu}\Big]
\end{aligned}
$$

  - shear **だけでなく**, vorticity **や** Ricci **も** entropy density **に効く**
  - $\mathfrak{s}^{\mu}$ **は** n^{ν}, $T^{\mu\nu}$ **だけでは表せず**, **それらの微分が必要** (ex. $\mathcal{D}_{\nu}\,\omega^{\mu\nu}$)

最近の話題： 微分展開としての流体力学
妄想

IS vs. BRS^3： **展開スキームの違い** $\Rightarrow$ **曲率依存性の違い**

- $T^{\mu\nu} = \cdots + C(\kappa)\, W_{\mu\alpha\nu\beta}\, u^\alpha u^\beta + C'(\lambda_3)\,(\omega\cdot\omega)^{\mu\nu}$

  goedesic deviation?

- $\mathfrak{s}^\mu = \cdots + C_3(\kappa)\,(\text{Ricci, etc.})^{\mu\nu}\, u_\nu + C_4(\lambda_3, \kappa)\, \mathcal{D}_\nu\, \omega^{\mu\nu}$

  Penrose's Weyl hypothesis?

- **何故** kinetic theory **は 曲率依存項を導かないのか？**

  mean field effect? $p^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - p^\nu\, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\, f\,]\, \frac{\partial}{\partial p^\lambda} \right] f = \mathcal{C}[\, f\,]$

- **非** conformal **な** hydro. **へ**

causal relativistic hydro. (Geroch & Lindblom)

DTTs の概念

仮定 $\{\mu\nu\}$: symm. & traceless

- dynamical var. : n^μ , $T^{\mu\nu}$
- dynamical eqn. : $A^{\lambda\{\mu\nu\}}(n^\rho, T^{\rho\sigma})$, $I^{\{\mu\nu\}}(n^\rho, T^{\rho\sigma})$

$$\nabla_\lambda n^\lambda = 0 \,, \qquad \nabla_\lambda T^{\lambda\mu} = 0 \,, \qquad \nabla_\lambda A^{\lambda\{\mu\nu\}} = I^{\{\mu\nu\}}$$

- entropy current $s^\mu = s^\mu(n^\rho, T^{\rho\sigma})$

  and the dynamical eqn. imply that $\nabla \cdot s \geq 0$

帰結

- new dyn. var. : ζ , ζ_μ , $\zeta_{\{\mu\nu\}}$ $\Leftrightarrow$ n^μ , $T^{\mu\nu}$
- $^\exists\, \chi \;\Rightarrow\; n^\mu = \dfrac{\partial\chi}{\partial\zeta_\mu}$, $T^{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial\zeta_\mu\partial\zeta_\nu}$, $A^{\lambda\{\mu\nu\}} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial\zeta_\lambda\partial\zeta_{\{\mu\nu\}}}$

$$s^\mu = \partial\chi/\partial\zeta_\mu - \zeta\, n^\mu - \zeta_\nu\, T^{\mu\nu} - \zeta_{\{\nu\rho\}}\, A^{\mu\{\nu\rho\}}$$

- given $I^{\{\nu\rho\}}$ $\Rightarrow$ dynamics!

causal relativistic hydro. (Geroch & Lindblom)

1st order formalism (Eckart) in DTTs

ex.) Eckart theory

$$n^\mu = n\, u^\mu$$

$$T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu u^\nu + 2\, P_\perp^{(\mu}\, u^{\nu)} + (\hat{p} + \Pi)\, h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$$

$$A^{\lambda\{\mu\nu\}} = 2\, \hat{T}\, u^{(\mu}\, h^{\nu)\lambda}$$

$$I^{\{\mu\nu\}} = -\hat{T}\, \pi^{\mu\nu}/\eta - 2\, \hat{T}\, g^{\{\mu\nu\}}\, \Pi/(3\, \eta_\Pi) - 2\, u^{\{\mu} P_\perp^{\nu\}}/\kappa$$

$$s^\mu = \hat{s}\, u^\mu + P_\perp^\mu/\hat{T}$$

gen. func. & variables of Eckart χ は $\zeta^{\{\mu\nu\}}$ について 1 次

$$\chi = \alpha(\zeta, \theta) - \zeta^{\{\mu\nu\}}\, \zeta_\mu\, \zeta_\nu/\mu\ , \qquad \theta := \zeta^\nu\, \zeta_\nu$$

$$\zeta = (\epsilon + \hat{p} - \hat{T}\, \hat{s})/(n\, \hat{T})\ , \qquad \zeta^\mu = u^\mu/\hat{T}$$

$$\zeta^{\{\mu\nu\}} = \left(\pi^{\mu\nu} - 2u^{\{\mu}\, P_\perp^{\nu\}} + \Pi\, g^{\{\mu\nu\}}/4\right)/(2\, \hat{T}^2)$$

$$n\, \hat{T} = 2\, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial\theta \partial\zeta}\ , \qquad \hat{p} = 2\, \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\ , \qquad \epsilon + \hat{p} = -4\, \theta\, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2}$$

利点

- causality と stability の解析が容易 $\zeta_A := (\zeta\,,\ \zeta_\mu\,,\ \zeta_{\{\mu\nu\}})$

$$\nabla\cdot n = 0\,,\quad \nabla\cdot T = 0\,,\quad \nabla\cdot A = I\,,$$

$$\Rightarrow\ M^{AB\mu}\,\nabla_\mu\zeta_B := \frac{\partial^3\chi}{\partial\zeta_A\partial\zeta_B\partial\zeta_\mu}\,\nabla_\mu\zeta_B$$

  - $M^{AB\mu}\,w_\mu$ is negative definite for $^\exists$ future-directed w_μ
    $\Rightarrow$ hyperbolic $\Rightarrow$ stable !
  - $M^{AB\mu}\,w_\mu$ is negative definite for $^\forall$ future-directed w_μ
    $\Rightarrow$ causal !
- 様々な 2nd order formalism theories が作れる $\Rightarrow$ 難点でもある
  (χ が $\zeta^{\{\mu\nu\}}$ について 2 次式ならば OK)

まとめ・展望

まとめ

- NS eqn. **の相対論版は** causality **と** stability **の点で不満**
- causality **問題解消：** **熱平衡からの展開** $+$ **第** 2 **法則** (IS),
  微分展開法 (BRS^3)   BRS^3 $\supset$ IS
- kinetic theory **からのサポート：** ○ IS   × BRS^3
  ただし, gauge/gravity **対応は後者をサポート**

展望

- BRS^3 **を導く** kinetic theory **の近似法は？** $\longrightarrow$ **平均場？** $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}[\,f\,]$
- BRS^3 **アプローチを** not conformal **へ**
- curvature $\sim$ entropy **？**
- **宇宙物理への応用は？**
  $\longrightarrow$ **相転移**, **降着円盤**, NS-NS, **磁気リコネクション**